E.N.S.E.T. section A 3 Durée: 4 h 1984

PREMIERE PARTIE

n désignant un entier $\geqslant 3$, on considère $\mathfrak{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. On définit l'application u qui à tout polynôme Q de $\mathfrak{P}_n$ fait correspondre :

$$u(Q) = (x^2 - 1)\,Q'' + 2\,x\,Q'$$

Q′ et Q″ désignant les dérivées du polynôme Q et x l'indéterminée.

1° Montrer que u est un endomorphisme de $\mathfrak{P}_n$

2° Montrer que : $\forall (P, Q) \in (\mathfrak{P}_n)^2$ on a :

(1) $$\int_{-1}^{+1} (u(P))(x).\,Q(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} P(x).\,(u(Q))(x)\,dx.$$

3° On considère la base canonique $(E_0, E_1, \ldots, E_n)$ de $\mathfrak{P}_n$, à savoir :

$$E_i(x) = x^i \qquad (i = 0,1 \ldots n)$$

a. Déterminer l'image matricielle $\mathcal{V}$ de l'endomorphisme u relativement à cette base.

b. En déduire les valeurs propres de u. Montrer qu'on peut les ranger en une suite strictement croissante : $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$

c. La matrice $\mathcal{V}$ est-elle diagonalisable?

d. Que peut-on dire de E_0 et de E_1?

4° *a.* Soit Q_i un vecteur propre non nul de u associé à la valeur propre λ_i. En utilisant la relation (1) montrer que :

$$i \neq j \Rightarrow \int_{-1}^{+1} Q_i(x)\,Q_j(x)\,dx = 0$$

(Propriété dite « d'orthogonalité »)

b. Montrer que les vecteurs propres Q_k associés respectivement aux valeurs propres λ_k $(k = 0,1 \ldots n)$ sont des polynômes de degrés respectifs k ;

c. Soit un polynôme P de degré effectif m où $m \leqslant n$. Montrer que si l'on a :

$$\forall\, i \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\} \qquad \int_{-1}^{+1} P(x)\,Q_i(x)\,dx = 0$$

alors P est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ_m.

5° On considère le système de polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ défini par :

$$P_k(x) = \frac{d^k}{dx^k}[(x^2 - 1)^k]$$

a. Quel est le degré effectif du polynôme P_k ? Déterminer son terme de plus haut degré.

b. Soient 2 entiers k et m vérifiant $0 \leqslant k < m$, montrer :

$$\int_{-1}^{+1} P_k(x)\,P_m(x)\,dx = (-1)^m \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^m \frac{d^{k+m}}{dx^{k+m}}[(x^2 - 1)^k]\,dx = 0$$

c. Montrer que P_0 et P_1 sont respectivement des vecteurs propres de u associés à λ_0 et λ_1.

d. En déduire que, pour $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, le polynôme P_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.

6° Dans cette question, on propose de montrer que pour tout entier $n > 0$, les zéros du polynôme P_n sont tous réels, de multiplicité *un* et situés dans $]-1, +1[$. On désigne par Z_n, l'ensemble, éventuellement vide à priori, des zéros de P_n de multiplicité impaire appartenant à $]-1, +1[$. On associe à Z_n le polynôme S : Si Z_n est vide $S(x) = 1$ et si Z_n est non vide on pose $Z_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ et $S(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m)$.

a. Montrer que si $k < n$:

$$\forall\, Q \in \mathfrak{P}_k : \int_{-1}^{+1} Q(x)\,P_n(x)\,(dx) = 0$$

. . . /. . .

b. Montrer que dans tous les cas le polynôme $P_n S$ est de signe constant sur $]-1, +1[$. Que peut-on en déduire pour l'intégrale : $\int_{-1}^{+1} S(x)\ P_n(x)\ dx$?

c. Montrer que Z_n n'est pas vide et prouver la propriété énoncée au début de cette sixième question.

DEUXIEME PARTIE

On considère le polynôme P de degré n défini par

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

où les nombres x_i $(i = 1, 2 \ldots, n)$ sont réels distincts et différents de $+1$ et de -1.

Soit R la fraction rationnelle définie par :

$$R(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)\ P^2(x)}$$

dont la décomposition en éléments simples s'écrit :

$$R(x) = \frac{\alpha}{x - 1} + \frac{\beta}{x + 1} + \sum_{k=1}^{k=n} \left[\frac{A_k}{(x - x_k)^2} + \frac{B_k}{x - x_k} \right]$$

(α, β, A_k, B_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ étant des constantes réelles).

1° Déterminer α et β en fonction de P(1) et de P(− 1).

2° Déterminer A_k en fonction de $P'(x_k)$ et de x_k.

3° On pose $P(x) = (x - x_k)\ Q(x)$. Donner des relations entre $P'(x_k)$ et $Q(x_k)$ d'une part, entre $P''(x_k)$ et $Q'(x_k)$ d'autre part.

4° Montrer que : $$B_k = \lim_{x \to x_k} \frac{d}{dx} \left[(x - x_k)^2\ R(x) \right]$$

En déduire une expression de B_k utilisant $P'(x_k)$, $P''(x_k)$ et x_k.

5° On veut déterminer les polynômes P de manière que

$$\forall k = 1, 2, \ldots, n : B_k = 0.$$

Cette propriété sera désignée dans toute la suite par $\mathfrak{P}$.

a. Montrer que si le polynôme P possède la propriété $\mathfrak{P}$, alors le polynôme S défini par $S = u(P)$ vérifie : $S(x_i) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$, u étant l'endomorphisme de $\mathfrak{P}_n$ défini dans la première partie.

b. Rechercher le terme de plus haut degré de S et en déduire que si P vérifie la propriété $\mathfrak{P}$, alors P est un vecteur propre de cet endomorphisme u.

c. Déduire de ce qui précède l'existence et l'unicité, pour chaque entier $n > 0$, du polynôme P vérifiant la propriété $\mathfrak{P}$. Donner l'expression d'un tel polynôme P.

TROISIEME PARTIE

Soit l'équation différentielle linéaire du second ordre (E_n) où n est un entier positif ou nul :

$$(E_n) \qquad (x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n + 1)y = 0$$

1° Déterminer tous les polynômes solutions de cette équation différentielle (E_n).

2° Résoudre l'équation E_0.

3° Soit P le polynôme déterminé dans la question 5 °c. de la deuxième partie. On pose :

$$R(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)\ P^2(x)}$$

et on désigne par F (x) une primitive quelconque de R (x) sur un intervalle I inclus dans $]-1, +1[$.

Montrer que $y(x) = P(x)\ F(x)$ est une solution de (E) sur cet intervalle I.

4° Donner l'expression de la solution générale de (E_n) sur des intervalles de $\mathbb{R}$ ne contenant ni $+1$ ni -1. On montrera en particulier que cette solution fait intervenir une fonction logarithme et deux polynômes.